Über die Feldgleichungen in quantisierten Feldtheorien

Von Gregor Wentzel

The University of Chicago, Chicago, U.S.A.

(Z. Naturforschg. 3a, 430—434 [1948]; eingegangen am 24. Juli 1948)

Herrn A. Sommerfeld zum 80. Geburtstage

Auf Grund der Tomonagaschen mehrzeitigen Schrödinger-Gleichung werden verallgemeinerte Feldgleichungen in relativistisch-invarianter Form aufgestellt und an Beispielen erläutert. Als Anwendung wird die Renormierung von Teilchen-Ruhmassen durch eine unitäre Transformation diskutiert.

1.

Um in der Quanten-Elektrodynamik die formale Auszeichnung der zeitlichen vor den räumlichen Koordinaten zu beseitigen, haben Dirac, Fock und Podolsky[1] individuelle Zeitkoordinaten für verschiedene Teilchen eingeführt. Dieser „mehrzeitige" Formalismus wurde von Tomonaga[2] verallgemeinert für den Fall, daß alle Teilchen durch quantisierte Wellen beschrieben werden. Dann ordnet man jedem Raumelement (am Orte x, y, z) eine individuelle Zeit $t(xyz)$ zu; durch die Funktion $t(xyz)$ ist eine Fläche σ im vierdimensionalen Raume $xyzt$ definiert. Die Schrödinger-Funktion Ψ des Systems wird als eine Funktion der Fläche σ aufgefaßt, d.h. als ein Funktional von $t(xyz)$; die Schrödinger-Gleichung bestimmt die Änderung von Ψ für den Fall, daß σ an einem Flächenpunkt infinitesimal verschoben wird.

Wird die Fläche an der Stelle $x = (ct, x, y, z)$ über ein Raumelement $d^4x = c\; dt\; dx\; dy\; dz$ bewegt, und bezeichnen wir die dadurch bedingte Änderung der Schrödinger-Funktion $\Psi(\sigma)$ mit $d^4x\; \partial\Psi(\sigma)/\partial\sigma(x)$, so besagt die verallgemeinerte Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar c \frac{\partial\Psi(\sigma)}{\partial\sigma(x)} = \boldsymbol{H}(x)\,\Psi(\sigma), \tag{1}$$

wo $\boldsymbol{H}(x)$ die Hamilton-Funktion (Dichte) am Orte x darstellt. Mit Tomonaga nehmen wir an, daß $\boldsymbol{H}(x)$ eine skalare Dichte ist; dies trifft z. B. in der Quanten-Elektrodynamik zu, wo $\boldsymbol{H}(x)$ das skalare Produkt des elektrischen Viererstroms und des elektromagnetischen Viererpotentials ist. Die Integrabilität von (1) erfordert, daß der Operator $\boldsymbol{H}(x)$ mit $\boldsymbol{H}(\bar{x})$, für einen beliebigen anderen Flächenpunkt $\bar{x}$ gebildet, kommutiert. Um diese Bedingung zu erfüllen, läßt man nur „raumartige" Flächen zu: je zwei Flächenpunkte sollen stets raumartig zueinander liegen.

Denken wir uns die Fläche nicht nur lokal, sondern längs ihrer ganzen Ausdehnung infinitesimal verschoben:

$$x_\nu \to x_\nu + \varepsilon_\nu(x), \qquad \varepsilon_\nu^2(x) < 0 \tag{2}$$

($x_4 = ict$; über doppelt vorkommende Indices ist zu summieren), so wird sich $\Psi(\sigma)$ ändern um

$$\delta\Psi = \int_\sigma d\sigma_\nu\, \varepsilon_\nu(x) \frac{\partial\Psi(\sigma)}{\partial\sigma(x)} = \frac{1}{i\hbar c}\int_\sigma d\sigma_\nu\, \varepsilon_\nu(x)\, \boldsymbol{H}(x)\,\Psi(\sigma)\,; \tag{3}$$

hier bedeutet $d\sigma_\nu$ ein vektorielles Flächenelement von σ ($d\sigma_\nu{}^2 < 0$; im „Ruhsystem" $d\sigma_1 = d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0$, $d\sigma_4 = -i\,dx\,dy\,dz = -i\,d^3x$). Für den Sonderfall einer Fläche $t = \text{const}$, die parallel verschoben wird ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_4 = ic\,\delta t$), führt (3) auf die „einzeitige" Schrödinger-Gleichung zurück:

$$i\hbar \frac{\delta\Psi}{\delta t} = \int d^3x\, \boldsymbol{H}(x)\,\Psi.$$

[1] P. A. M. Dirac, V. Fock u. B. Podolsky, Physik. Z. Sowjetunion 2, 468 [1932]. Vgl. auch G. Wentzel, Quantentheorie der Wellenfelder, F. Deuticke, Wien 1943, § 18.

[2] S. Tomonaga, Progr. theor. Physics 1, 27 [1946]; Z. Koba, T. Tati u. S. Tomonaga, ebenda 2, 101, 198 [1947]. Vgl. auch J. Schwinger, Physic. Rev., im Erscheinen.

[3] Bezüglich der statistischen Interpretation der mehrzeitigen Schrödinger-Funktion vgl. F. Bloch, Physik. Z. Sowjetunion 5, 301 [1934]; S. Tomonaga[2].

2.

Sei $f(x)$ ein Operator, der nur von Feldgrößen am Weltpunkt x abhängt, so können wir den Erwartungswert[3] $\Psi^*(\sigma) f(x) \Psi(\sigma)$ bilden, wobei unter σ eine Fläche zu verstehen ist, die durch den Punkt x hindurchgeht. Verschieben wir die Fläche und auch den darauf liegenden Punkt x gemäß (2), so ändert sich $\Psi^*(\sigma) f(x) \Psi(\sigma)$ um

$$\Psi^*(\sigma)\left\{\varepsilon_\nu(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_\nu}+\frac{1}{i\hbar c}\int_\sigma d\sigma_\nu'\,\varepsilon_\nu(x')\,[f(x),\boldsymbol{H}(x')]\right\}\Psi(\sigma) \tag{4}$$

(wegen Hermitizität von $\boldsymbol{H}$). Da alle Flächenelemente $d\sigma'$ raumartig zu x liegen, kann der Kommutator $[f(x), \boldsymbol{H}(x')]$ nur für $x' \cong x$ von Null verschieden sein, so daß man im Integranden $\varepsilon_\nu(x')$ durch den konstanten Wert $\varepsilon_\nu(x)$ ersetzen darf. Der Ausdruck (4) wird hiermit:

$$\Psi^*(\sigma)\,\varepsilon_\nu(x)\frac{df(x)}{dx_\nu}\Psi(\sigma),$$

wo

$$\frac{df(x)}{dx_\nu}=\frac{\partial f(x)}{\partial x_\nu}+\frac{1}{i\hbar c}\int_\sigma d\sigma_\nu'\,[f(x),\boldsymbol{H}(x')]. \tag{5}$$

Diese Definitionsgleichung ist eine Verallgemeinerung der „Feldgleichungen" der einzeitigen Theorie, welch letztere durch Spezialisierung auf Flächen $t = \text{const}$ erhalten werden.

Als Beispiel betrachten wir zunächst einen skalaren Feldoperator, der explizit von den Raum- und Zeitkoordinaten abhängt gemäß

$$\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_\nu^2}=\mu^2\varphi(x), \tag{6}$$

und der den Vertauschungsrelationen genügt

$$[\varphi(x),\varphi(x')]=\frac{\hbar c}{i}D^{(\mu)}(x-x'), \tag{7}$$

$$D^{(\mu)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,e^{i\vec{k}\vec{x}}\,\frac{\sin\left(tc\sqrt{\mu^2+k^2}\right)}{\sqrt{\mu^2+k^2}};$$

ferner sei

$$\boldsymbol{H}(x)=\frac{1}{2}\gamma\varphi^2(x)+\varrho(x)\varphi(x) \tag{8}$$

angenommen, wo die Dichtefunktion ϱ mit φ kommutieren soll. Setzt man in (5) $f(x) = \varphi(x)$, so ist der Integrand des Flächenintegrals identisch Null, da $D^{(\mu)}(x-x') = 0$ für raumartige Punktepaare, einschließlich $x' = x$; folglich ist

$$\frac{d\varphi(x)}{dx_\nu}=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\nu}.$$

Hingegen liefert (5) für $f = \partial\varphi/\partial x_\nu$:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx_\nu^2}=\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_\nu^2}-\int_\sigma d\sigma_\nu'\,\frac{\partial D^{(\mu)}(x-x')}{\partial x_\nu}[\gamma\varphi(x')+\varrho(x')].$$

Das hier auftretende Flächenintegral ist invariant und wird am einfachsten berechnet in dem Bezugssystem, in welchem das bei x liegende Flächenelement $d\sigma'$ die Komponenten 0, 0, 0, $-i\,d^3x$ hat. Da

$$i\left(\frac{\partial D^{(\mu)}(x)}{\partial x_4}\right)_{x_4=0}=\delta(\vec{x})\equiv\delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3),$$

folgt unmittelbar:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx_\nu^2}=\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_\nu^2}+\gamma\varphi(x)+\varrho(x)$$

$$=(\mu^2+\gamma)\varphi(x)+\varrho(x);$$

d. h. die zum Felde φ gehörigen Partikel haben die Ruhmasse $\sqrt{\mu^2+\gamma}\,\hbar/c$, und $\varrho(x)$ ist die Quellfunktion.

Als ein zweites Beispiel wählen wir die elektromagnetischen Feldstärken

$$f_{\mu\nu}=\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\mu},$$

wo gemäß den Ansätzen der mehrzeitigen Quanten-Elektrodynamik

$$\frac{\partial^2\varphi_\mu(x)}{\partial x_\nu^2}=0,$$

$$[\varphi_\mu(x),\varphi_{\mu'}(x')]=\frac{\hbar e}{i}\delta_{\mu\mu'}D^{(0)}(x-x'),$$

$$\boldsymbol{H}(x)=-s_\mu(x)\,\varphi_\mu(x).$$

Für $f = f_{\mu\nu}$ ergibt (5):

$$\frac{d f_{\mu\nu}(x)}{d x_\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi_\nu(x)}{\partial x_\nu} + \int\limits_\sigma d\sigma'_\nu \left[\frac{\partial D^{(0)}(x-x')}{\partial x_\nu} s_\mu(x') - \frac{\partial D^{(0)}(x-x')}{\partial x_\mu} s_\nu(x')\right].$$

Die Schrödinger-Funktion $\Psi(\sigma)$ unterliegt hier der Nebenbedingung

$$\left\{\frac{\partial \varphi_\nu(x)}{\partial x_\nu} + \int\limits_\sigma d\sigma'_\nu D^{(0)}(x-x')\, s_\nu(x')\right\} \Psi(\sigma) = 0\,,$$

die in dieser Form auch für Punkte x außerhalb σ gilt. Daher bleibt einfach

$$\frac{d f_{\mu\nu}(x)}{d x_\nu} = \int\limits_\sigma d\sigma'_\nu \frac{\partial D^{(0)}(x-x')}{\partial x_\nu} s_\mu(x')\,,$$

oder, wie oben im speziellen Bezugssystem ausgewertet:

$$\frac{d f_{\mu\nu}(x)}{d x_\nu} = - s_\mu(x)\,.$$

Um auch den zweiten Satz der Maxwellschen Gleichungen zu erhalten, bilden wir

$$\frac{d f_{\mu\nu}(x)}{d x_\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial \varphi_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu(x)}{\partial x_\mu}\right) + \int\limits_\sigma d\sigma'_\lambda \left[\frac{\partial D^{(0)}(x-x')}{\partial x_\nu} s_\mu(x') - \frac{\partial D^{(0)}(x-x')}{\partial x_\mu} s_\nu(x')\right].$$

Sind hier alle drei Indices λ, μ, ν voneinander verschieden, so verschwindet das Flächenintegral, da im speziellen Bezugssystem nur $d\sigma_4' \neq 0$, aber $\partial D^{(0)}/\partial x_k = 0$ für $k = 1, 2, 3$. Damit wird in der Tat

$$\sum \frac{d f_{\mu\nu}(x)}{d x_\lambda} = 0$$

in der Summe über die zyklischen Permutationen von λ, μ, ν[4].

[4] Diese Ableitung enthält natürlich nichts wesentlich Neues gegenüber derjenigen von Dirac, Fock u. Podolsky[1], ist aber kürzer, dank der invarianten Schreibweise.

3.

Eine Verallgemeinerung der Feldgleichungen (5) ergibt sich, wenn wir eine Feldgröße f betrachten, die außer vom Punkte x noch von der Fläche σ abhängt, also ein Funktional von $t(xyz)$ ist. Dann ist in (4) ein Term

$$\Psi^*(\sigma) \int\limits_\sigma d\sigma'_\nu\, \varepsilon_\nu(x') \frac{\partial f(x,\sigma)}{\partial \sigma(x')} \Psi(\sigma)$$

hinzuzufügen, und zum mindesten im Hinblick auf Parallelverschiebungen von σ ($\varepsilon_\nu = \text{const}$) ist es sinnvoll,

$$\frac{d f(x,\sigma)}{d x_\nu} = \frac{\partial f(x,\sigma)}{\partial x_\nu} + \int\limits_\sigma d\sigma'_\nu \left\{\frac{\partial f(x,\sigma)}{\partial \sigma(x')} + \frac{1}{i\hbar c}[f(x,\sigma), \boldsymbol{H}(x')]\right\} \tag{9}$$

zu definieren. Wir wollen hier den besonderen Fall einer Größe $f(x, \sigma)$ besprechen, die aus einer nur x-abhängigen Größe durch Transformation mit einem unitären Operator gewonnen wird, welcher von σ abhängt.

In der Schrödinger-Gleichung (1) setzen wir

$$\Psi(\sigma) = S(\sigma)\, \Psi'(\sigma)\,; \tag{10}$$

dann folgt für Ψ' die neue Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar c \frac{\partial \Psi'(\sigma)}{\partial \sigma(x)} = \boldsymbol{H}'(x,\sigma)\, \Psi'(\sigma)\,, \tag{11}$$

mit

$$\boldsymbol{H}(x,\sigma) = S^{-1}(\sigma)\,\boldsymbol{H}(x)\,S(\sigma) - i\,\hbar\,c\,S^{-1}(\sigma)\,\frac{\partial S(\sigma)}{\partial\sigma(x)}. \tag{12}$$

Die neue Hamilton-Funktion ist wieder hermitisch, wenn S unitär ist. Es ist

$$\Psi^*(\sigma)\,f(x)\,\Psi(\sigma) = \Psi'^*(\sigma)\,f'(x,\sigma)\,\Psi'(\sigma),$$

$$f'(x,\sigma) = S^{-1}(\sigma)\,f(x)\,S(\sigma). \tag{13}$$

Setzt man diesen Operator für f in (9) ein, so ist dort natürlich $\boldsymbol{H}$ durch $\boldsymbol{H}'$ zu ersetzen; ferner wird

$$\frac{\partial f'(x,\sigma)}{\partial\sigma(x')} = S^{-1}(\sigma)\,f(x)\,\frac{\partial S(\sigma)}{\partial\sigma(x')} + \frac{\partial S^{-1}(\sigma)}{\partial\sigma(x')}\,f(x)\,S(\sigma) = \left[f'(x,\sigma),\, S^{-1}(\sigma)\,\frac{\partial S(\sigma)}{\partial\sigma(x')}\right].$$

Hiermit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{df'(x,\sigma)}{dx_\nu} &= \frac{\partial f'(x,\sigma)}{\partial x_\nu} + \int_\sigma d\sigma'_\nu \left\{\frac{\partial f'(x,\sigma)}{\partial\sigma(x')} + \frac{1}{i\,\hbar\,c}\,[f'(x,\sigma),\boldsymbol{H}'(x',\sigma)]\right\}\\ &= S^{-1}(\sigma)\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_\nu} + \frac{1}{i\,\hbar\,c}\int_\sigma d\sigma'_\nu\,[f(x),\boldsymbol{H}(x')]\right\} S(\sigma),\end{aligned}$$

d. h. nach (5):

$$\frac{df'(x,\sigma)}{dx_\nu} = S^{-1}(\sigma)\,\frac{df(x)}{dx_\nu}\,S(\sigma). \tag{14}$$

Wählen wir beispielsweise für f wieder den durch (6), (7) definierten Feldoperator φ, speziell mit $\boldsymbol{H} = 0$, so daß

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx_\nu^2} = \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_\nu^2} = \mu^2\,\varphi(x),$$

so wird auch für den gemäß (13) transformierten Operator φ'

$$\frac{d^2\varphi'(x,\sigma)}{dx_\nu^2} = S^{-1}(\sigma)\,\frac{d^2\varphi(x)}{dx_\nu^2}\,S(\sigma) = \mu^2\,\varphi'(x,\sigma),$$

d. h. die unitäre Transformation läßt die Feldgleichung invariant.

4.

Bei den Selbstenergie-Problemen begegnet man der Aufgabe, die Ruhmasse eines Teilchens zu „renormieren", d. h. Feldoperatoren einzuführen, die einer veränderten Ruhmasse entsprechen. Dies kann etwa durch eine Abänderung der Hamilton-Funktion erreicht werden [vgl. den Term $1/2\cdot\gamma\,\varphi^2$ in (8)]. Statt dessen kann man aber auch die Feldfunktionen einer Transformation vom Typus (13) unterziehen, ohne die Schrödinger-Gleichung zu ändern, oder umgekehrt. Das letztere Vorgehen empfiehlt sich, wenn neben der Schrödinger-Gleichung noch Nebenbedingungen für $\Psi(\sigma)$ zu erfüllen sind, wie in der Quanten-Elektrodynamik; die Vereinbarkeit der verschiedenen Gleichungen bleibt nämlich unter unitären Transformationen automatisch bestehen[5].

Als Beispiel diene wieder der skalare Operator φ [vgl. (6), (7)]. Wir bilden

$$\begin{aligned}\chi(x,\sigma) &= e^{i\,U(\sigma)}\,\varphi(x)\,e^{-i\,U(\sigma)}\\ &= \varphi(x) + i\,[\varphi(x),U(\sigma)] + \ldots,\end{aligned} \tag{15}$$

wo U definiert sei durch

$$\frac{\partial U(\sigma)}{\partial\sigma(x)} = \frac{\gamma}{2\,\hbar\,c}\,\varphi^2(x). \tag{16}$$

Die Konstante γ gelte hier als infinitesimal, d. h. Terme $\sim\gamma^2$ seien vernachlässigt. Nehmen wir ferner einfachheitshalber $\boldsymbol{H} = 0$ an, d. h. $\Psi(\sigma) = \text{const}$,

[5] Vgl. G. Wentzel, Physic. Rev., im Erscheinen.

so wird nach (9)

$$\frac{d\chi(x,\sigma)}{dx_\nu} = e^{iU(\sigma)} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\nu} e^{-iU(\sigma)} - i \int_\sigma d\sigma_\nu' \left[\varphi(x), \frac{\partial U(\sigma)}{\partial\sigma(x')}\right],$$

wo das Flächenintegral nach (16) und (7) verschwindet, und

$$\frac{d^2\chi(x,\sigma)}{dx_\nu^2} = e^{iU(\sigma)} \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_\nu^2} e^{-iU(\sigma)} - i \int_\sigma d\sigma_\nu' \left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\nu}, \frac{\partial U(\sigma)}{\partial\sigma(x')}\right],$$

woraus mit Hilfe von (6) und (7) wie früher (vgl. Abschn. 2) folgt:

$$\frac{d^2\chi(x,\sigma)}{dx_\nu^2} = (\mu^2 + \gamma)\,\chi(x,\sigma),$$

entsprechend der Ruhmasse $\sqrt{\mu^2+\gamma}\,\hbar/c$.

Anstatt den gemäß (15) transformierten Operator χ einzuführen, kann man natürlich auch φ beibehalten und die Schrödinger-Gleichung entsprechend transformieren. Setzen wir nämlich in (10), (11), (12)

$$S(\sigma) = e^{iU(\sigma)},$$

so daß

$$\Psi^*(\sigma)\,\chi(x,\sigma)\,\Psi(\sigma) = \Psi'^*(\sigma)\,\varphi(x)\,\Psi'(\sigma),$$

so wird

$$\boldsymbol{H}'(x,\sigma) = -i\hbar c\, S^{-1}(\sigma) \frac{\partial S(\sigma)}{\partial\sigma(x)} = \hbar c \frac{\partial U(\sigma)}{\partial\sigma(x)} + \ldots = 1/2 \cdot \gamma\,\varphi^2(x) + \ldots,$$

und unter Verwendung dieser Hamilton-Funktion (statt $\boldsymbol{H}$) in (5) folgt wie oben

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx_\nu^2} = (\mu^2+\gamma)\,\varphi(x).$$

Daß diese Betrachtungen auf Teilchen mit Spin übertragen werden können, bedarf wohl keiner Erläuterung.

Bemerkungen zum Turbulenzproblem

Von Werner Heisenberg

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **3a**, 434—437 [1948]; eingegangen am 15. Juni 1948)

Die verschiedenen physikalischen Gesichtspunkte, die einerseits den früheren Stabilitätsuntersuchungen an laminaren Strömungen, andererseits der neueren statistischen Turbulenztheorie zugrunde liegen, werden miteinander verglichen und kritisch besprochen.

In früheren Jahren hat Sommerfeld mit seinen Schülern häufig das Turbulenzproblem diskutiert, das lange Zeit als das ungelöste Grundproblem der neueren Hydrodynamik galt. Inzwischen hat die statistische Theorie der Turbulenz, die vor etwa zehn Jahren von Taylor[1] und v. Kármán[2] begründet worden ist, so entscheidende Fortschritte ermöglicht, daß das Turbulenzproblem in seinem physikalischen Kern wohl als gelöst angesehen werden kann. In den folgenden Zeilen sollen verschiedene physikalische Gesichtspunkte, die im Laufe der Zeit auf das Turbulenzproblem angewandt worden sind, noch einmal kritisch erörtert werden.

Vor etwa vierzig Jahren wurde von Sommerfeld[3] zunächst die Frage behandelt: Woher kommt es, daß gewisse laminare Bewegungen, die bis zu beliebigen Geschwindigkeiten Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen sind, von bestimmten Werten der Reynoldsschen Zahl ab instabil werden? Diese Fragestellung ging von der Auffassung aus, daß in einer reibungslosen Flüssigkeit alle die laminaren Bewegungen auftreten könnten, die man aus der klassischen Hydrodynamik kennt, daß aber offenbar die Rei-

[1] G. J. Taylor, Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A **151**, 421 [1935].

[2] Th. v. Kármán u. L. Howarth, Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A **164**, 192 [1938].

[3] A. Sommerfeld, Int. Math. Kongr. Rom 1908, Vol. III, S. 116.